

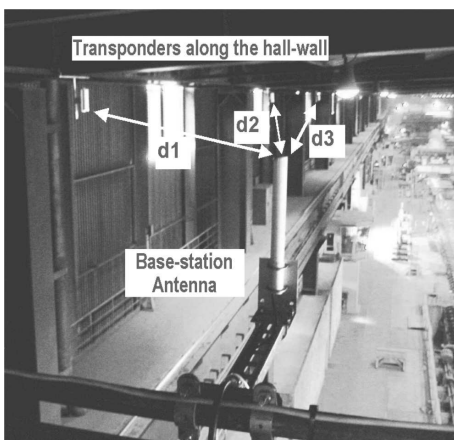


Automatisches Einmessen der Transponderpositionen eines LPR-Systems der Firma Symeo

Local-Positioning Radar

Das Local-Positioning Radar System (LPR) der Symeo GmbH erlaubt eine auf wenige Zentimeter genaue Ortung mobiler Objekte und wird unter anderem zur Unterstützung des Produktionsablaufes im industriellen Umfeld eingesetzt.

Dafür sendet eine mobile Messstation Funk-signale aus, diese werden von mehreren Transpondern, die als Landmarken dienen, empfangen, verstärkt, moduliert und an die Basisstationen zurückgesendet. Die Messbaugruppe ermittelt aus den Signallaufzeiten ihren eigenen Aufenthaltsort- bzw. den Ort der mit ihr ausgerüsteten Geräte.



Das System arbeitet störungsfrei in staubiger, schmutziger, heißer oder kalter Umgebung, bei Nebel oder Schneefall und ist bei der Dillinger Hüttenwerke GTS seit Mitte 2004 im täglichen Einsatz und erfasst die Koordinaten von 18 Kränen.



Aufgabenstellung

Aus den Abständen zwischen der mobilen Basisstation auf dem zu ortenden Objekt und den **bekannt Positionen** der nächstgelegenen Transponder werden die aktuellen Koordinaten des Objektes errechnet. Die Reichweite eines Transponders beträgt bis zu 100 Meter, so dass typisch für ca. 5-8 Transponder je Messung verwertbare Abstandsdaten vorliegen.

Zur Ermittlung der Positionen der Transponder war bisher vor der Inbetriebnahme eine mit hohem Zeit- und Kostenaufwand verbundene Laser-Vermessung erforderlich. In Hinblick auf einem mobilen Einsatz (Baustelle) besteht daher vom Kunden der Wunsch nach einer **automatischen Einmessung** des Systems durch eine Referenzfahrt.

Seitens des Instituts für Mathematik der TU Clausthal war ein mathematisches Modell zu erstellen, das ein automatisches Einmessen der Transponderpositionen aus den Abstandsdaten einer Referenzfahrt ermöglicht.

Modellierung

Gegeben seien p Transponder

$$T_i = (x_i, y_i, h), \quad i = 1, \dots, p$$

mit $x_i, y_i, h \in \mathbb{R}$, an den Koordinaten der mobilen Basisstation

$$B_k = (X_k, Y_k, H), \quad k = 1, \dots, n$$

mit $X_k, Y_k, H \in \mathbb{R}$ seien insgesamt n Abstandsmessungen erfolgt.

Während der Messungen konnten zu gewissen Transpondern die Entfernungen (zunächst exakt) bestimmt werden. Es sei hier

$$M \subseteq \{(i, k) \mid i \in \{1, \dots, p\}, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

die Menge derjenigen Paare (i, k) , für die ein Messwert r_{ik} vorliegt.

Für $(i, k) \in M$ ist damit

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - X_k)^2 + (y_i - Y_k)^2 + (h - H)^2} \quad (1)$$

der euklidische Abstand der Transponderposition T_i von der Antennenposition B_k .

Die Messdaten werden in einer Matrix $R = (r_{ik}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ zusammengefaßt.

Die zu lösende Aufgabe kann nun wie folgt gefaßt werden:

Gegeben seien R, h und H . Man bestimme daraus T_i für $i = 1, \dots, p$ und B_k für $k = 1, \dots, n$.

Aufgrund der geometrischen Struktur der Gleichung (1) ist das Problem in dieser Form

1. translationsinvariant,
2. rotationsinvariant und
3. spiegelungsinvariant.

Folglich gibt es beliebig viele Lösungen. Um zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen, sind also gewisse Freiheitsgrade durch die Bereitstellung von Zusatzinformationen festzulegen. Hierzu reicht es, von einem Transponder die Koordinaten zu kennen und von zwei weiteren beispielsweise jeweils die y -Koordinate, wobei nicht alle drei Punkte auf einer Geraden liegen dürfen.

Es bezeichnen e_{ij} für $(i, j) \in N$ die vorgegebenen Koordinaten der T_i ,

$$N \subseteq \{(i, j) \mid i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, 2\}\}.$$

Dabei bedeutet $(i, 1) \in N$, dass von T_i die x -Koordinate vorgegeben ist und entsprechend $(i, 2) \in N$ für vorgegebene y -Koordinate.

Da nun die gemessenen Entfernungen r_{ij} fehlerbehaftet sind, führt die optimale Ermittlung der Unbekannten im Sinne der Fehlerquadratmethode auf folgendes Minimierungsproblem:

Bestimme $x, y \in \mathbb{R}^p$ und $X, Y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x, y, X, Y) :=$$

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ k=1, \dots, n \\ (i,k) \in M}} w_{ik} (r_{ik}^2 - (x_i - X_k)^2 - (y_i - Y_k)^2 - (h - H)^2)^2$$

$$+ \gamma \left(\sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ (i,1) \in N}} (x_i - e_{i1})^4 + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ (i,2) \in N}} (y_i - e_{i2})^4 \right) \rightarrow \min,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ gilt.

Durch die Hinzunahme von Gewichtstermen $w_{ik} > 0$ ist die Möglichkeit gegeben, die abstandsabhängige Messunsicherheit bereits im mathematischen Ansatz selbst zu kompensieren.

Ein für die praktische Umsetzung sinnvoller Wert liegt hier bei

$$w_{ik} = 10r_{ik}^{-2}. \quad (2)$$

Mathematische Behandlung und Ergebnisse

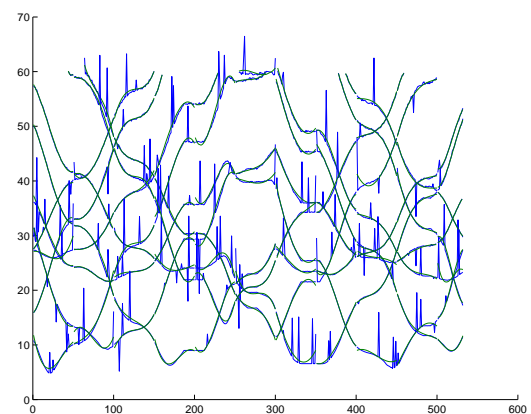
Notwendige Bedingung für ein Minimum von F ist:

$$\text{grad } F(x, y, X, Y) = 0. \quad (3)$$

Dies ist ein Nullstellenproblem im $\mathbb{R}^{2(p+n)}$. Es handelt sich also um $2(p+n)$ nichtlineare Gleichungen mit $2(p+n)$ Unbekannten x, y, X, Y . Für praktische Anwendungen ist $n \geq 5000$ und $p \geq 30$ zu erwarten.

Zur Lösung wird ein Newtonverfahren verwendet.

Die folgende Abbildung zeigt reale Messwerte einer Referenzfahrt mit $n = 20$ Transpondern und $p = 540$ Messwerten (blau) sowie (grün) Ausgleichskurven zur Filterung von Multipathfehlern, die durch Reflexionen entstehen.



Die Rekonstruktion der Referenzfahrt und der (für die Validierung) bekannten Transponderpositionen ist in der nächsten Abbildung zu sehen. Der maximale Fehler tritt bei Transponder 6 auf und beträgt 7 cm, vom Auftraggeber gefordert war ein Fehler unterhalb von 15 cm.

